


- 1) $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = \arcsin u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
- 2) $y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = \arccos u(x) \Rightarrow y' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
- 3) $y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \arctan u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
- 4) $y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$, $y = \operatorname{arccot} u(x) \Rightarrow y' = \frac{-u'(x)}{1+u^2(x)}$
- 5) $y = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow y' = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$
- 6) $y = \operatorname{arccosec} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

⊕ $y = f(x) = \sin x$  $\cos x = \sqrt{1-y^2}$

$x = f^{-1}(y) = \arcsin y$

$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ dan
 $\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Latihan

1) $y = \arctan 2x$ misal $y'(2) = ?$

$y' = \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2} \Rightarrow y'(2) = \frac{2}{17}$

2) $y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ misal $y'(1) = ?$

$y' = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $y'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $y = \operatorname{arccot} \sqrt{x}$ misal $y'(4) = ?$

$y' = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{1+x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, $y'(4) = -\frac{1}{20}$

4) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ için $y' = ?$

$$y' = \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

5) $y = \arcsin(x^2 + 2)$ için $y' = ?$
 kısıtlı
 \arcsin $[-1, 1]$ aralığındaki sayılara etki eder.

Logaritma ve Üstel Fonksiyonların Türevi

1) $y = \log_a u(x)$ için $y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \frac{1}{\ln a}$

2) $y = \ln u(x)$ için $y' = \frac{u'}{u}$, $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

3) $y = e^{u(x)}$ için $y' = u' e^u$, $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

4) $y = a^{u(x)}$ için $y' = u' a^u \cdot \ln a$

5) logaritmik türev $y = (f(x))^{g(x)}$ ise önce her iki tarafın \ln i alınır ve sonra türev alınır.

Örnekler

1) $y = x \ln x \Rightarrow y'(e) = ?$

$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad y'(e) = 1 + 1 = 2$$

2) $y = \ln(\sin x)$ için $y' = ?$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

3) $y = e^{-\frac{x}{2}}$ için $y' = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$

4) $y = \frac{1}{x} e^{-2x^2+x}$ için $y' = -\frac{1}{x^2} e^{-2x^2+x} + \frac{1}{x} \cdot (-4x+1) e^{-2x^2+x}$
 $y' = e^{-2x^2+x} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 4 \right)$

Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ için } y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \text{ olur.}$$

$$1) y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$$

$$y = \sinh u(x) \Rightarrow y' = u' \cosh u(x)$$

$$2) y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$$

$$y = \cosh u(x) \Rightarrow y' = u' \sinh u(x)$$

$$3) y = \tanh x \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 x$$

$$y = \tanh u(x) \Rightarrow y' = u' \operatorname{sech}^2 u(x)$$

$$4) y = \coth x \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$y = \coth u(x) \Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosech}^2 u(x)$$

$$5) y = \operatorname{sech} x \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$y = \operatorname{sech} u(x) \Rightarrow y' = -u' \operatorname{sech} u \tanh u$$

$$6) y = \operatorname{cosech} x \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech} x \cdot \coth x$$

$$y = \operatorname{cosech} u(x) \Rightarrow$$

$$y' = -u' \operatorname{cosech} u \cdot \coth u$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

Örnekler

$$1) y = x^3 \sinh 5x \text{ için } y' = 3x^2 \sinh 5x + x^3 \cdot 5 \cosh 5x$$

$$2) y = \tanh x \text{ için } y' = ?$$

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow y' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \sinh x}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$3) y = \frac{x^3 + 1}{\tanh(2x)} \text{ için } y' = ?$$

$$y' = \frac{3x^2 \cdot \tanh(2x) - (x^3 + 1) \cdot \operatorname{sech}^2(2x) \cdot 2}{\tanh^2(2x)}$$

İkinci Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

$$y = \sinh x \text{ için } x = f^{-1}(y) = \operatorname{arcsinh} y$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$1) y = \operatorname{arcsinh} x \text{ ise } y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$$

$$2) y = \operatorname{arcosh} x \text{ ise } y' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$$

$$3) y = \operatorname{artanh} x \text{ ise } y' = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1$$

$$4) y = \operatorname{arcoth} x \text{ ise } y' = -\frac{1}{1-x^2}, |x| < 1$$

$$5) y = \operatorname{arsech} x \text{ ise } y' = \frac{-1}{|x| \sqrt{1-x^2}}, x \in (0, 1)$$

$$6) y = \operatorname{arcsech} x \text{ ise } y' = \frac{-1}{|x| \sqrt{1+x^2}}, \mathbb{R} - \{0\}$$

Kapalı Fonksiyonların Türevi

$F(x, y) = 0$ şeklindeki fonksiyonlara kapalı fkt denir. Burada

$y = f(x)$ yazılabilirse bu da aslında fkt denir.

$$F'(x, y) = -\frac{F_x}{F_y} \text{ dir. } F_x, y \text{ ler sabit kabul edilip } x \text{ e göre } F_y, x \text{ ler " " " " } y \text{ ye " "}$$

Örnekler

$$1) x^2 + y^2 = 1 \text{ için } y' = ?$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y' = F' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \text{ olur}$$

$$\text{veya } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

Ⓚ

$$\begin{aligned} \sin x &\rightarrow \cos x \\ \sin y &\rightarrow \cos y \cdot y' \\ x^2 &\rightarrow 2x \\ y^2 &\rightarrow 2yy' \\ x+y &\rightarrow 1+y' \\ xy &\rightarrow y+x \cdot y' \\ \frac{x}{y} &\rightarrow \frac{y - x \cdot y'}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot y' \\ \frac{1}{y} &\rightarrow \frac{1}{y^2} \cdot y' = \frac{1}{y^2} \cdot y' \end{aligned}$$

Parametrik Fonksiyonların Türevi

$$\left. \begin{array}{l} y = g(t) \\ x = h(t) \end{array} \right\} \text{ ise } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Örnekler

$$1) \left. \begin{array}{l} x = 4t^2 + 3t + 1 \\ y = 2t + 1 \end{array} \right\} \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2}{8t+3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = \frac{2}{11}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x = 6 \sin 3t \\ y = 6 \cos 3t \end{array} \right\} y = f(x) \text{ fonksiyonunun } x=3 \text{ ağırlıklı noktasındaki türevinin değeri nedir?}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \Big|_{x=3} = ? \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{6 \cdot 2 \cos 3t \cdot (-3 \sin 3t)}{6 \cdot 3 \cos 3t} = -2 \sin 3t$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=3} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$x=3 \Rightarrow 3 = 6 \sin 3t \Rightarrow \sin 3t = \frac{1}{2}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

$$y = f(x) \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad y'' = f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$\dots y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad n \text{ mertebeden türevdir.}$$

Örnekler

$$1) y = \frac{1}{x} \text{ için } \frac{d^{12} y}{dx^{12}} = ?$$

$$y = x^{-1} \quad y' = -x^{-2} \quad y'' = 2x^{-3} \quad y''' = 2(1-3)x^{-4} \quad y^{(4)} = 2(1-3)(-4)x^{-5} \dots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$$

$$y^{(12)} = (-1)^{12} \cdot 12! \cdot x^{-(12+1)} = 12! \cdot x^{-13}$$

$$2) y = x^2 e^x \quad y'''(0) = ?$$

$$y''' = e^x (x^2 + 6x + 6)$$

$$y'''(0) = 1(6) = 6$$

$$3) \left. \begin{array}{l} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{array} \right\} \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ nın } t = \frac{\pi}{4} \text{teki değeri?}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4 \cos t}{-3 \sin t} = -\frac{4}{3} \cot t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{+\frac{4}{3} \csc^2 t}{-3 \sin t} = -\frac{4}{9} \frac{1}{\sin^3 t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\pi/4} = -\frac{4}{9} \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^3} = -\frac{8\sqrt{2}}{9}$$

(8)